Тәжірибелік сабақ 6

Ішектің тербеліс теңдеуі үшін Фурье әдісі

Толқындық теңдеу үшін қойылатын бастапқы–бірінші шекаралық есепті қарастырайық.

$$U_{tt} = U_{xx}, \quad (x,t) \in Q = \{(x,t) \in R^2; 0 < x < 1,\ t > 0\} \qquad (1)$$

теңдеуінің

$$U(x,0) = \varphi(x), \quad U_t(x,0) = \psi(x) \quad 0 \le x \le 1 \qquad (2)$$

бастапқы шарттарын

$$U(0,t) = U(1,t) = 0 \quad t \ge 0 \qquad (3)$$

шекаралық шарттарды қанағаттандыратын $C^{2,2}(Q) \cap C^{0,1}(\overline{Q})$ класында жататын классикалық шешімін табу керек.

1-қадам. (1) теңдеуінің шешімін $X(x)$ және $T(t)$ функцияларының көбейтіндісі түрінде іздестіреміз, яғни $U(x,t) = X(x)T(t) \neq 0$. $X(x)$ және $T(t)$ белгісіз функцияларын табу үшін $U(x,t)$ функциясының дербес туындыларын табамыз:

$$U_{tt}(x,t) = X(x)T''(t)\ ,\ U_{xx}(x,t) = X''(x)T(t)$$

Табылған туындыларды (1) теңдеуіне апарып қойып, айнымалыларды ажыратамыз:

$$X(x)T''(t) = X''(x)T(t) \Rightarrow \frac{T''(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}. \qquad (*)$$

Алынған теңдіктің сол жағы t айнымалысына, ал оң жағы x айнымалысына байланысты функциялар. x және t тәуелсіз айнымалылар бір-біріне тәуелсіз болғандықтан, соңғы (*) теңдеуінің әрбір жағы тұрақты болу керек. Осы тұрақтыны -λ деп белгілейік. (λ алдындағы «–» таңбасы есепті шығаруға ыңғайлы болу үшін алынған). Онда

$$\frac{T''(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda$$

немесе

а) $T''(t) + \lambda T(t) = 0$; ә) $X''(x) + \lambda X(x) = 0$.

(3) шекаралық шарттарын пайдаланып,

$$U(0,t) = 0 \Rightarrow X(0)T(t) = 0 \Rightarrow X(0) = 0$$

шарттарын аламыз.

$$U(1,t) = 0 \Rightarrow X(1)T(t) = 0 \Rightarrow X(1) = 0$$

2-қадам.

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0 \\ X(0) = X(1) = 0 \end{cases}$$

Штурм-Лиувилль есебін шешеміз. Бұл есептің меншікті мәндері $\lambda_n = \pi^2 n^2, \quad n = 1,2,...,$ ал өзіндік функциялары $X_n = \sin \pi n x$ формуласы арқылы табылатындығына келеміз.

3-қадам . λ - параметрінің табылған мәндерін а) теңдеуіне қойып, оны шешеміз:

$$T'' + \lambda T = 0 \Rightarrow T_n'' + \pi^2 n^2 T_n(t) = 0 \Rightarrow k_n^2 + \pi^2 n^2 = 0 \Rightarrow k_{n_1} = \pi n i, \quad k_{n_2} = -\pi n i \Rightarrow$$

$$T_{n_1} = \cos \pi n t, \quad T_{n_1} = \sin \pi n t \Rightarrow T_n(t) = A_n \cos \pi n t + B_n \sin \pi n t$$

4-қадам. а) - ә) теңдеулерінің шешімдерін пайдаланып, (1) теңдеуінің дербес шешімін

$$U_n(x,t) = X_n(x) T_n(t) = (A_n \cos \pi n t + B_n \sin \pi n t) \sin \pi n x$$

формуласы арқылы жазамыз. Бұл дербес шешімдерді *толқындық теңдеудің меншікті тербелістері* деп атайды. (9.6.1) теңдеуі біртекті және сызықты болғандықтан $U_n(x,t)$ дербес шешімдерінің сызықты комбинацияларынан құралған

$$U(x,t)=\sum_{n-1}^{\infty}U_n(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}(A_n\cos\pi nt+B_n\sin\pi nt)\sin\pi nx \qquad (4)$$

функциясы да (1) теңдеуінің шешімін анықтайды және ол (3) шекаралық шарттарды қанағаттандырады.

5-қадам. A_n және B_n коэффициенттерін табу үшін бастапқы шарттарды пайдаланамыз. Бірінші бастапқы шарттан

$$U(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin\pi nx \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin\pi nx=\varphi(x)$$

теңдігін аламыз. Егер $\varphi(x)$ функциясының [0, 1] кесіндісінде үшінші ретті үзіліссіз туындысы бар және $\varphi(0)=\varphi(l)=\varphi''(0)=\varphi''(l)=0$ теңдіктері орындалатын болса, онда Стеклов теоремасы бойынша оны Штурм-Лиувилль есебінің өзіндік функциялары арқылы Фурье қатарына жіктеуге және Фурье қатарының коэффициенттерін

$$A_n=2\int_0^1\varphi(x)\sin\pi nxdx, \qquad (5)$$

формуласы арқылы табуға болады.

Екінші бастапқы шарттан

$$U_t(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}(-\pi nA_n\sin\pi nt+\pi nB_n\cos\pi nt)\sin\pi nx$$

$$U_t(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}B_n\pi n\sin\pi nx \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}B_n\pi n\sin\pi nx=\psi(x)$$

теңдігін аламыз. Егер $\psi(x)$ функциясының [0, 1] кесіндісінде екінші ретті туындысы бар және $\psi(0)=\psi(1)=0$ теңдігі орындалатын болса, онда Стеклов теоремасы бойынша оны Штурм-Лиувилль есебінің өзіндік функциялары арқылы жіктеуге және Фурье қатарларының коэффициенттерін

$$B_n=\frac{2}{\pi n}\int_0^1\psi(x)\sin\pi nxdx, \qquad (6)$$

формуласы арқылы табуға болады. Табылған A_n және B_n коэффиценттерін (4) теңдігіне апарып қойып (1)–(3) есебінің шешімін табамыз.